Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

RM
2022-2023

One se place dans un espace métrique (E, d).

1 Espaces connexes

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1 : On dit que E est connexe si il vérifie l'une des 3 assertions suivantes :
i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.
ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vide.
iii) Les seuls parties ouvertes et fermés de E sont $\emptyset$ et E.

Remarque 2 : La notion de connexité est une notion topologique. Tous les résultats suivants, sauf exceptions annoncées, restent vrai dans un espace topologique (X, τ) quelconque.

Exemple 3 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes.

Définition 4 : On dit qu'une partie A de E est connexe si A muni de la distance d induite sur A est connexe, c'est à dire si $A \subset O_1 \cup O_2$ où O_1, O_2 des ouverts de E vérifiant $A \cap 0_1 \cap 0_2 = \emptyset$, alors $(A \cup 0_1 = \emptyset$ et $A \subset O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subset O_1)$. On a de même avec les fermés.

Exemple 5 : L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

Lemme (de passage des douanes) 6 : Soit A une partie de E. Toute partie connexe C de E qui rencontrent l'intérieur de A et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A.

Théorème 7 : Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.

Proposition 8 : E est connexe si et seulement si tout application continue $f : E \to \mathbb{Z}$ est constante.

Remarque 9 : On peut remplacer $\mathbb{Z}$ par n'importe quel espace discret ayant au moins deux éléments, donc on choisit souvent $\{0, 1\}$.

1.2 Stabilité et suites

Proposition 10 : Soit A une partie connexe de E. Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.

Corollaire 11 : On en déduit que A est connexe si et seulement si $\overline{A}$ est connexe.

Proposition 12 : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de E telle que $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Remarque 13 : Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de connexe telle que $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Proposition 14 : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (avec $I = \{0, 1, ..., p\}$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \in I \setminus \{0\}$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$. Alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (Voir figure 1).

Remarque 15 : Une intersection de connexe n'est pas forcément connexe (Voir figure 2).

Proposition 16 : Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.

Théorème 17 : Soient (X, d) un espace compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X telle que $\lim_{n \to +\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est un connexe de X.

Application 18 : Soient $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une fonction continue et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $x_0 \in [0, 1]$ et qui vérifie de plus $\lim_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Alors la suite (x_n) converge.

Dev 1

1.3 Composantes connexes

Définition 19 : La relation "$\forall x, y \in E, x \sim y \Leftrightarrow \exists C$ connexe de E telle que $x \in C$ et $y \in C$" définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont appelés composantes connexes de E et se note $C(x)$.

Exemple 20 : Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.

Proposition 21 : i) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x; c'est aussi le plus grand connexe contenant x.

ii) $C(x)$ est fermé dans E.

Proposition 22 : Si $E = \sqcup_{i\in I}\omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Proposition 23 : Soit h un homéomorphisme de E dans E'. Alors h échange les composantes connexes.

Application 24 : On en déduit que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

1.4 Connexité par arc

Définition 25 : On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc, $\gamma(1)$ son extrémité.

Définition 26 : On dit que E est connexe par arc si pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

Exemple 27 : On a que les espaces vectoriels normés sont connexes par arc avec pour $(x,y) \in E$ un e.v.n, $\gamma : t \in [0,1] \mapsto tx + (1-t)y$. On a aussi que les ensembles convexes d'un e.v.n sont connexes par arc.

Exemple 28 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > f(x)\}$ son épigraphe. Alors X est connexe par arc (Voir figure 3).

Théorème 29 : Un espace connexe par arc est connexe.

Contre-exemple 30 : Voici un exemple d'un ensemble connexe mais non connexe par arc. Soit $Y = \{(t, \sin t), t > 0\}$ et $\overline{Y} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup Y$. Alors $\overline{Y}$ est connexe mais pas connexe par arc (Voir figure 4).

Remarque 31 : Ceci est très pratique car il est souvent plus facile de montrer la connexité par arc. La réciproque est fausse, mais elle est vrai dans le cas ou c'est un ouvert d'un e.v.n.

2 Applications de la connexité en Analyse

2.1 En analyse réelle

Théorème 32 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$, sont équivalents : *i*) A est connexe.
ii) A est un intervalle.

Théorème (des valeurs intermédiaires) 33 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Exemple 34 : Tout polynôme de degré 3 dans $\mathbb{R}$ admet au moins une racine réelle.

Théorème (de Brouwer en dimension 1) 35 : Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.

Définition 36 : Une application $f : E \to E'$ est dite localement constante si tout point $a \in X$ possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$.

Proposition 37 : Soit E connexe et $f : E \to E'$ localement constante; alors f constante.

Application (théorème d'unicité globale de Cauchy-Lipschitz) 38 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne en la deuxième variable; soit y_1 et y_2 deux solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$; si y_1 et y_2 sont égales en un point de I, alors $y_1 = y_2$.

2.2 En analyse complexe

Lemme 39 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors U est connexe si et seulement si U est connexe par arc.

Théorème 40 : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}\gamma$. Pour $z \in u$, on pose $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$. Alors l'application $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, et nulle sur la composante connexe non bornée de U.

Remarque 41 : Intuitivement, $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ est le "nombre de tour" décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a,b]$.

Théorème (Formule de Cauchy pour un convexe) 42 : Soit γ un lacet dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus \mathrm{im}\gamma$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors :

$$f(z)\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Théorème 43 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Alors f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U.

Théorème (Prolongement analytique) 44 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et f analytique sur U. Alors f est identiquement nulle sur U si et seulement si f est identiquement nulle dans un voisinage de a.

Théorème (Zéros isolés) 45 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f analytique sur U non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V autour d'un zéro $u \in Z(f)$ tel que $V \cap Z(f) = \emptyset$.

Remarque/exemple 46 : On utilise ceci sur une fonction $h = f - g$ pour pouvoir étendre l'égalité $f = g$ sur un domaine plus grand. On utilise ce théorème pour montrer que $exp(log(z)) = z$ sur $\mathbb{C}$ car vrai sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation.

Définition 47 : Une fonction locale est un couple (f, D) où D est un disque ouvert non vide et f est une fonction holomorphe sur D. Soit $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement analytique de (f, D) le long de γ est une famille de fonctions locales $(f_t, D_t)_{t\in[0,1]}$ telle que

a) $(f_0, D_0) = (f, D)$

b) pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t

c) pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\varepsilon >$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t - t'| < \varepsilon, \gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_t \equiv f_{t'}$ sur cette intersection.

Développement 48 : Soit (f, D) une fonction locale et γ un chemin tel que $\gamma(0)$ soit le centre de D. Considérons (f_1, D_1) et $(\tilde{f_1}, \tilde{D_1})$ les éléments terminaux de deux prolongements analytique de (f, D) le long de γ. On a alors que f_1 et $\tilde{f_1}$ sont égales sur $D_1 \cap \tilde{D_1}$ (Voir fig 5).

Dev 2

Théorème (Principe du maximum) 49 : Soit U un ouvert connexe et borné de $\mathbb{C}$, et f une fonction holomorphe sur U et continue sur $\overline{U}$. Alors si M est le maximum de $|f|$ sur ∂U, on a $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$. En outre, s'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| = M$, alors f est constante sur U.

3 Connexité dans les espaces de matrices

Théorème 50 : L'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$.

Théorème 51 : On a que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc, donc connexe également.

Proposition 52 : L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes de G sont $G^+ = \{A; \det A > 0\}$ et $G^- = \{A; \det A < 0\}$.

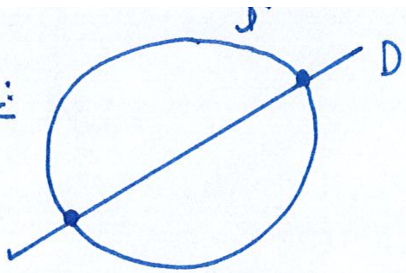
Proposition 53 : $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont aussi connexes par arcs.

Rajouter peut-être des trucs si j'en trouve plus tard.

Références :

1. Topologie de Queffelec.
2. Analyse de Gourdon.
3. Analyse complexe pour la licence 3 de Tauvel.
4. Algèbre et géométrie de Rombaldi.
5. Oral à l'agrégation de isenmann (issou)1
6. 131 développements pour l'oral de Lesesvre.

Figure 2:



D connexe, S^1 connexe, $D \cap S^1$ non connexe

Figure 1:

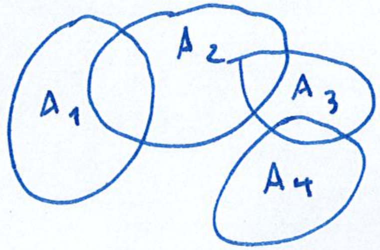


Figure 3:

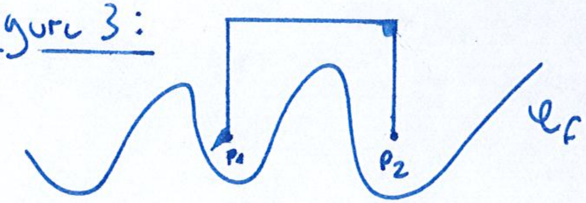


Figure 4:

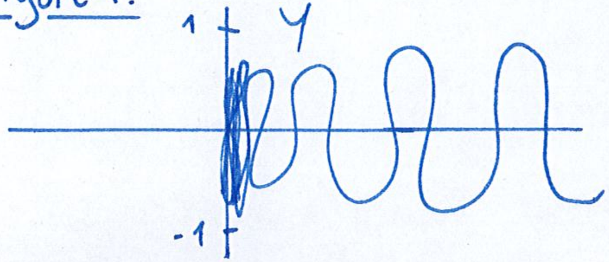
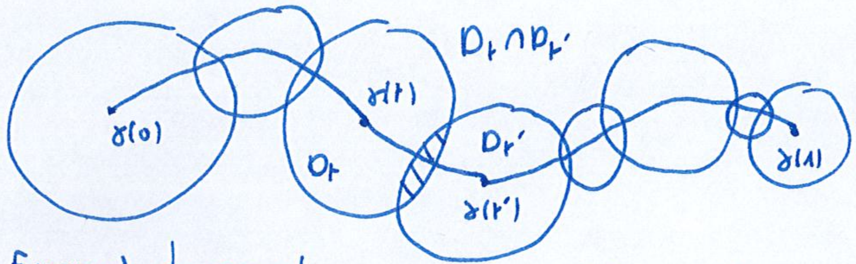


Figure 5:



Exemple de prolongement analytique $(f_t, D_t)_t$ le long de γ.